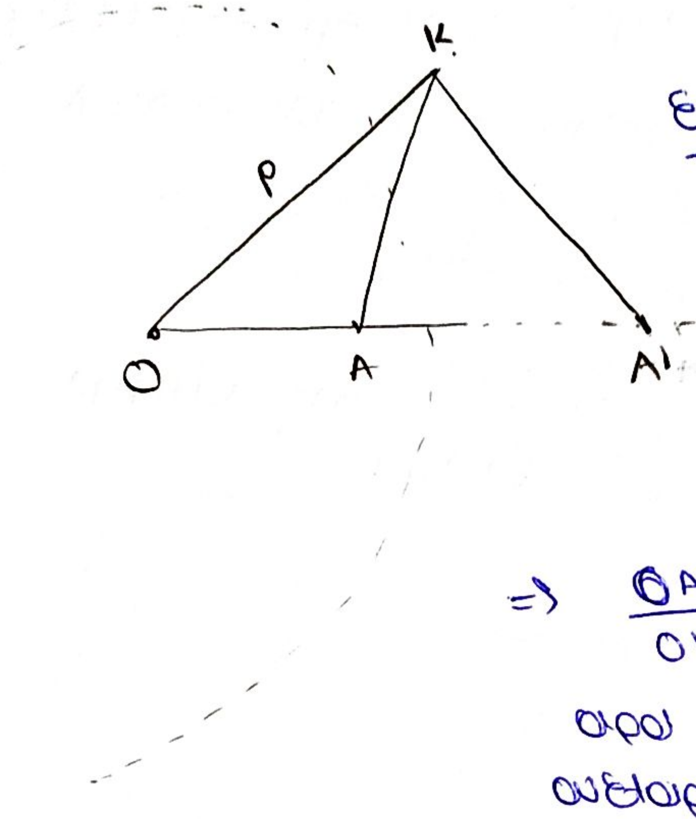
Διάλεξη 5η

02/12/2019

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜ.



Παρατηρώ ότι η επιλογή του σημείου Κ του κύκλου είναι "ανεξάρτητη" ως προς την αντιστροφή.
Παρατηρώ ότι το $O\hat{A}K \approx O\hat{A'}K$
($O\hat{K}A = O\hat{A'}K = \phi$, $\hat{O}$ κοινή άρα και η τρίτη γωνία ίση)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OK} = \frac{OK}{OA'} \Rightarrow (OA)(OA') = (OK)^2 \Rightarrow OA\,OA' = \rho^2$$

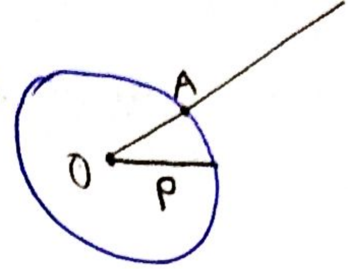
άρα τα σημεία Α, Α' είναι ανεξάρτητα της επιλογής του Κ.

Ορισμός: Έστω κύκλος C κέντρου Ο και ακτίνας ρ ($C(O,\rho)$) και έστω Α σημείο του επιπέδου με $A \neq O$.
Αν Α' σημείο τ.ω. $OA\,OA' = \rho^2$ (στην ημιευθεία ΟΑ) $\Rightarrow$ το Α' καλείται αντίστροφο σημείο του Α ως προς τον μετασχηματισμό της αντιστροφής του κύκλου $C(O,\rho)$
↳ $\phi(A) = A'$, $A, A' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Ο "C" καλείται κύκλος αντιστροφής.
Ο "O" —"— κέντρο —"—
το "ρ" —"— ακτίνα —"—.

Παρατηρήσεις: ① $OA\,OA' = \rho^2$, προφανώς $A, A' \neq O$ καθώς $\rho \neq 0$. Το κέντρο της αντιστροφής πάντα εξαιρείται.

2) Έστω ο κύκλος C : C



Αν το $A \in C(O,\rho)$ τότε η εικόνα του $A' = A$: $(OA)(OA') = \rho^2 \Rightarrow OA' = \rho \Rightarrow A' \in C(O,\rho)$ και καθώς βρίσκεται στην ημιευθεία $OA \Rightarrow A' = A$.

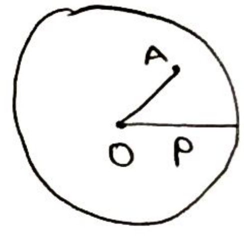
Άρα ο C μέσω αντιστροφής C απεικονίζεται στον εαυτό του. Δηλ. $C \xrightarrow{C\ \text{αντ.}} C$.

3) Εικόνα των εσωτερικών σημείων του $C(O,\rho)$:

Έστω $A \neq O$ εσωτ. σημείο του $C(O,\rho)$

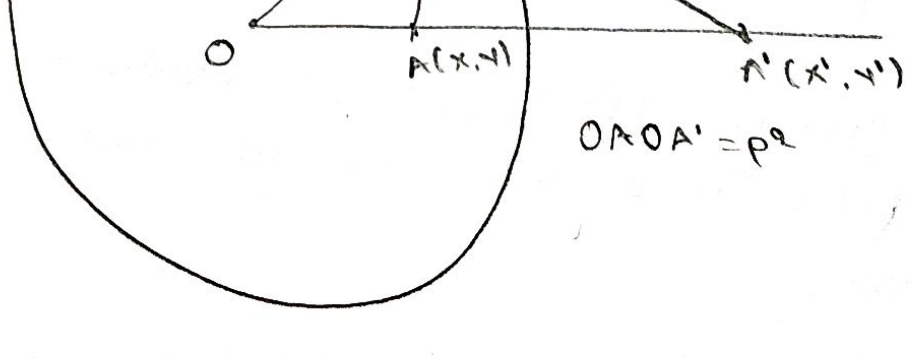
Παρατηρώ ότι

$$OA < \rho \Rightarrow$$
$$OA \cdot OA' < \rho \cdot OA' \Rightarrow$$
$$\rho^2 < \rho OA' \Rightarrow$$
$$\rho < OA'.$$

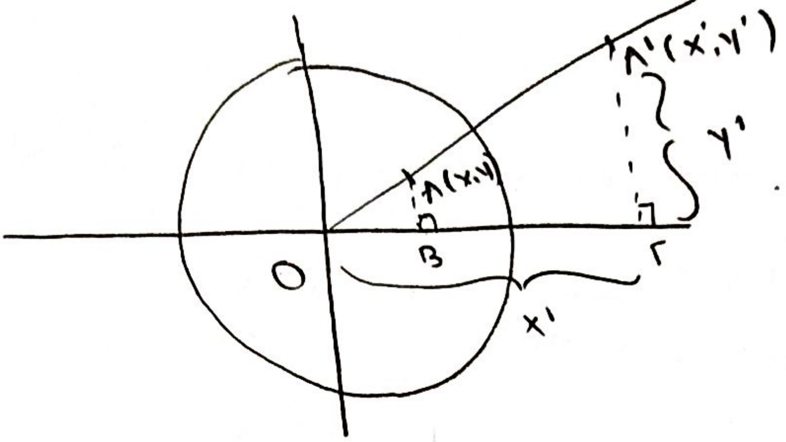


Άρα κάθε εσωτερικό σημείο κύκλου αντιστροφής, απεικονίζεται σε εξωτερικό και αντίστροφα.

4) Αν A' αντίστροφο του A, τότε και το A αντίστροφο του A'. $(OA \cdot OA' = \rho^2 = OA' OA)$



Παρατηρούμε ότι $\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'} \Rightarrow y' = \frac{y}{x}\cdot x'$.



$O\hat{A}B \approx O\hat{A}'\Gamma$ (ως ορθογώνια με $\hat{O}$ κοινή)

(*) Έχουμε θεωρήσει κέντρο $O(0,0) \Rightarrow$

$OA' = k\cdot OA$, $k>0$ $\Rightarrow (x',y')=(kx,ky)$, $k>0$. (x,y ομό- / x',y' σημα)

$OA\cdot OA' = \rho^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2} = \rho^2 \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x'^2+y'^2)=\rho^4$.

$$\xRightarrow{(x,y)\neq(0,0)} (x'^2+y'^2) = \frac{\rho^4}{(x^2+y^2)} \Rightarrow \left(x'^2 + x'^2\cdot\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{\rho^4}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x'^2\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2} = \frac{\rho^4}{x^2+y^2} \Rightarrow x'^2\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2} = \frac{\rho^4}{x^2+y^2}$$

καθώς x', x ομόσημα: $\Rightarrow \underbrace{\boxed{x' = \frac{x\rho^2}{x^2+y^2},\ y' = \frac{y\rho^2}{x^2+y^2}}}$

η σχέση που συνδέει το σημείο $A(x,y)$ με το αντίστροφό του $A'(x',y')$ ως προς αντιστροφή $C((0,0),\rho)$

και $\boxed{x = \frac{x'\rho^2}{x'^2+y'^2} \quad y = \frac{y'\rho^2}{x'^2+y'^2}}$

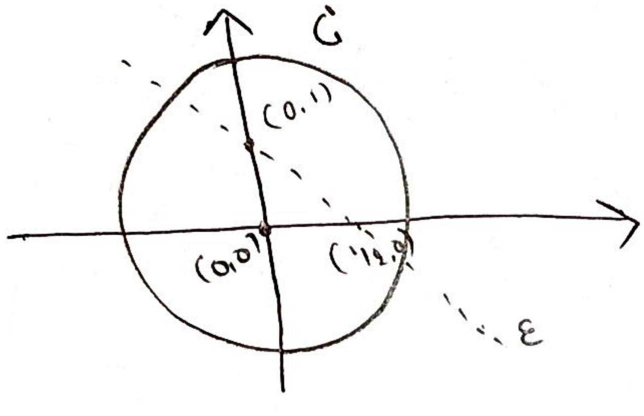
Οι τύποι για $\underbrace{\text{τυχαίους κύκλους}}_{C((x_0,y_0),\rho)\Rightarrow}$ γενικά είναι:

αν $A(x,y)$ και το αντίστροφο του $A'(x',y') \Rightarrow$

$$\begin{cases} \boxed{x' = \dfrac{\rho^2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + x_0} \\ \boxed{y' = \dfrac{\rho^2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} + y_0} \end{cases}$$

Παραδείγματα:

1) Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $2x+4y=1$ μέσω της αντιστροφής ως προς μοναδιαίο κύκλο.



Γνωρίζουμε ότι

$$(x,y) = \left(\frac{x'}{x'^2+y'^2}, \frac{y'}{x'^2+y'^2}\right)$$

$\Rightarrow$ άρα $2 \cdot \dfrac{x'}{x'^2+y'^2} + 4\dfrac{y'}{x'^2+y'^2} = 1$

$2x'+4y' = x'^2+y'^2 \Rightarrow (x')^2 - 2x' + 1 + (y')^2 - 4y' + 2^2 = 1 + 2^2$

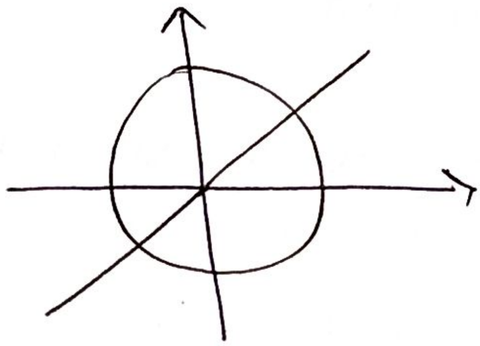
$\Rightarrow (x'-1)^2 + (y'-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

Άρα η εικόνα της (ε) είναι ο κύκλος κέντρου $(1,2)$ και ακτίνας $\sqrt{5}$.

(*) Εξαιρείτε τα $(0,0) \in C'$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, είχε πιο άλλα γενικής μορφής, δηλαδή αντί για $2x+4y=1$ είχε $\alpha x+\beta y=\gamma$ και έπρεπε να διακριν. περ: i) να διέρχεται από το $(0,0)$, ii) να μην...

2) Να βρεθεί η εικόνα της $y=\alpha x$, $\alpha\neq 0$ ως προς αντιστροφή $C((0,0), \rho=1)$



$$y=\alpha x \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{(x')^2+(y')^2}=\alpha\frac{x'}{(x')^2+(y')^2} \Rightarrow$$

$$y'=\alpha x'.$$

Είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο.

3) Ομοίως για την $y=\alpha x+\beta$.

$$\frac{y'}{(x')^2+(y')^2}=\alpha\frac{x'}{(x')^2+(y')^2}+\beta \Rightarrow y'=\alpha x'+\beta(x'^2+y'^2)$$

$$\Rightarrow \beta x'^2+\beta y'^2+\alpha x'-y'=0$$

διακρίνω περιπτώσεις:

- $\beta=0 \Rightarrow y'=\alpha x'$
- $\beta\neq 0 \Rightarrow (x')^2+(y')^2+\frac{\alpha}{\beta}x'-\frac{1}{\beta}y'=0 \Rightarrow$

$$(x')^2+(y')^2+2\cdot\frac{\alpha}{2\beta}x'-2\cdot\frac{1}{2\beta}y'=0 \Rightarrow$$

$$(x')^2+(y')^2+2\cdot\frac{\alpha}{2\beta}x'-2\frac{1}{2\beta}y'+\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2+\left(\frac{1}{2\beta}\right)^2-\left(\frac{1}{2\beta}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \left(x'+\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2+\left(y'-\frac{1}{2\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2+1}{4\beta^2}$$

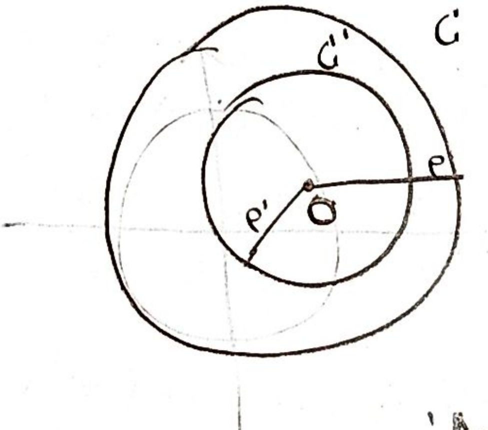
↳ εξαιρείται το $(0,0)\in C'$

Άρα: έστω αντιστροφή $C(O,\rho)$. Ευθεία η οποία διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής $\xmapsto{\text{απεικ}}$ ευθεία.

Ευθεία που δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστρ. $\xrightarrow{\text{απεικονίζεται}}$ κύκλο (που διέρχεται από το κέντρο.

4) "Η εικόνα του κύκλου αντιστροφής είναι ο ίδιος ο κύκλος", καθώς είδαμε ότι κάθε σημείο του κύκλου αντιστροφής απεικονίζεται στον εαυτό του.

5) SOS Εικόνα κύκλου ομόκεντρου του κύκλου αντιστροφής:



Ψάχνω την εικόνα του C' ως προς τον C,
έστω $A \in C' \rightarrow OA = \rho'$.

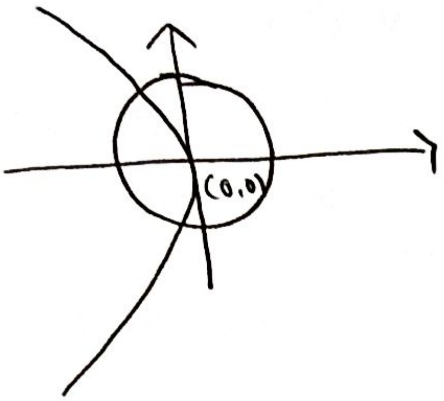
$OA \cdot OA' = \rho^2 \Rightarrow \rho' \cdot OA' = \rho^2$
$\Rightarrow OA' = \frac{\rho^2}{\rho'}$: σταθερά

Άρα $A' \in$ σε κύκλο, κέντρου O και ακτίνας ρ^2/ρ'.

Άρα κύκλος ο οποίος δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής $\longmapsto$ κύκλος δεν διέρχεται.

6) Να βρεθεί η εικόνα του κύκλου $C((-2,0),2)$ ως προς τον μοναδιαίο κύκλο αντιστροφής.

$C: (x+2)^2 + y^2 = 2^2$. (Το $(0,0)$ κέντρο αντιστροφής και επαληθεύει την εξίσωση του C)



γνωρ. ότι $\begin{cases} x = \dfrac{x'}{(x')^2 + y'^2} \\ y = \dfrac{y'}{(x')^2 + (y')^2} \end{cases}$

• $$\left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2} + 2\right)^2 + \frac{y'}{x'^2 + y'^2} = 2^2$$

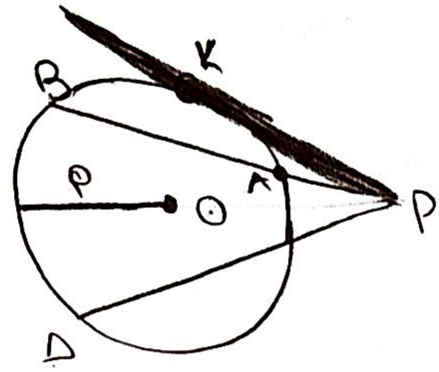
$$\underbrace{\left(\frac{x'}{(x')^2 + (y')^2}\right)^2 + \left(\frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)^2}_{\frac{x'^2 + y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} = \frac{1}{(x')^2 + (y')^2}} + \frac{4x'}{x'^2 + y'^2} = 0 \Rightarrow$$

Έχω υπολογίσει στο ότι: $\dfrac{1}{(x')^2 + (y')^2} + \dfrac{4x'}{(x')^2 + (y')^2} = 0 \Rightarrow$

$$1 + 4x' = 0 \Rightarrow \boxed{x' = -\frac{1}{4}}$$

• κύκλο ο οποίος διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής $\longmapsto$ ευθεία

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο :

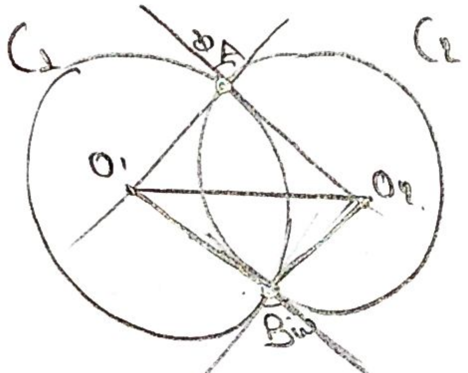


Ισχύει $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$
(τρόπος για νδο 4 σημεία είναι ομοκυκλικά)

Που $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta = \begin{cases} = \underbrace{(PO)^2}_{(*)} - r^2, & \text{αν } P \text{ εξωτερικό} \\ = r^2 - \underbrace{(PO)^2}_{(*)} & \text{αν } P \text{ εσωτερικό} \end{cases}$

(*) Ο αριθμός αυτός καλείται δύναμη του σημείου P ως προς τον C.

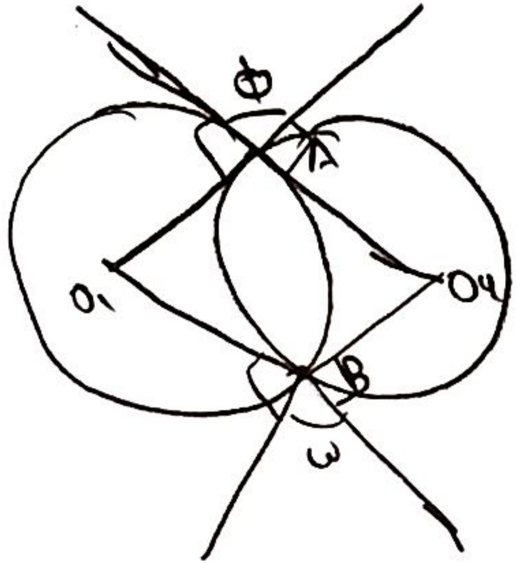
Ορισμός: Έστω C_1, C_2, δύο κύκλοι που τέμνονται, θέτω τις εφαπτόμενες στο A της C_1, C_2, αντίστοιχα.



$O_1\hat{A}O_2 = O_1\hat{B}O_2$

Η γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ορίζεται ως η γωνία των C_1, C_2.

Ορισμός: Αν $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = 1$ ορθή, οι κύκλοι λέγονται ορθογώνιοι (τέμνονται ορθογώνια)



άρα $O_1\hat{A}O_2 = O_1\hat{B}O_2$ (*)
η ακτίνα κύκλου είναι
πάντα ⊥ στην εφαπτομένη
στο αντίστοιχο σημείο

$$\hat{\Phi} = 4L - (2 \text{ ορθές} + O_1\hat{A}O_2)$$
$$= 2L - O_1\hat{A}O_2$$

<u>και</u>

$$\hat{\omega} = 4L - (2L + O_1\hat{B}O_2)$$
$$= 2L - O_1\hat{B}O_2$$

(*) ⟹ $\hat{\Phi} = \hat{\omega}$